**第二讲　平面向量的数量积及应用**

id:2147491510;FounderCES

题组1数量积的定义及长度、角度问题

1*.*[2016全国卷Ⅲ,3,5分]已知向量*=*(,),*=*(,),则∠*ABC=*()

A.30*°* B.45*°* C.60*°* D.120*°*

2*.*[2016山东,8,5分][理]已知非零向量***m***,***n***满足4*|****m****|=*3*|****n****|*,cos*<****m***,***n****>=.*若***n***⊥(*t****m****+****n***),则实数*t*的值为()

A*.*4 B*.-*4 C*.* D*.-*

3*.*[2015安徽,8,5分][理]△*ABC*是边长为2的等边三角形,已知向量***a***,***b***满足*=*2***a***,*=*2***a****+****b***,则下列结论正确的是()

A*.|****b****|=*1 B*.****a***⊥***b*** C*.****a***·***b****=*1 D*.*(4***a****+****b***)⊥

4*.*[2015福建,9,5分][理]已知⊥,*||=*,*||=t.*若点*P*是△*ABC*所在平面内的一点,且*=+*,则·的最大值等于()

A.13 B.15 C.19 D.21

5*.*[2015重庆,6,5分][理]若非零向量***a***,***b***满足*|****a****|=|****b****|*,且(***a****-****b***)⊥(3***a****+*2***b***),则***a***与***b***的夹角为()

A. B. C. D.π

6*.*[2017全国卷Ⅰ,13,5分][理]已知向量***a***,***b***的夹角为60*°*,*|****a****|=*2,*|****b****|=*1,则*|****a****+*2***b****|=　　　　.*

7*.*[2017山东,12,5分][理]已知***e***1,***e***2是互相垂直的单位向量*.*若***e***1*-****e***2与***e***1*+λ****e***2的夹角为60*°*,则实数*λ*的值是*.*

8*.*[2017天津,13,5分][理]在△*ABC*中,∠*A=*60*°*,*AB=*3,*AC=*2*.*若*=*2,*=λ-*(*λ*∈R),且·*=-*4,则*λ*的值为*.*

9*.*[2016浙江,15,4分]已知平面向量***a***,***b***,*|****a****|=*1,*|****b****|=*2,***a***·***b****=*1,若***e***为平面单位向量,则*|****a***·***e****|+|****b***·***e****|*的最大值是*.*

题组2平面向量的综合应用

10*.*[2017全国卷*Ⅱ*,12,5分][理]已知△*ABC*是边长为2的等边三角形,*P*为平面*ABC*内一点,则·(*+*)的最小值是()

A.-2 B.- C.- D.-1

11*.*[2017 浙江,10,4分][理] 如图5*-*2*-*1,已知平面四边形*ABCD*,*AB*⊥*BC*,*AB=BC=AD=*2,

*CD=*3,*AC*与*BD*交于点*O.*记*I*1*=*·,*I*2*=*·,*I*3*=*·,则 ()

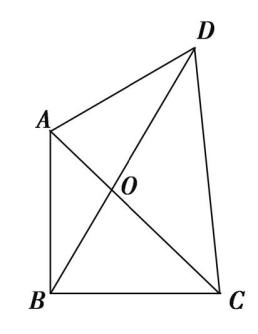


图5*-*2*-*1

A.*I*1*<I*2*<I*3 B.*I*1*<I*3*<I*2 C.*I*3*<I*1*<I*2 D.*I*2*<I*1*<I*3

12*.*[2015 山东,4,5分][理]已知菱形*ABCD*的边长为*a*,∠*ABC=*60*°*,则·*=*()

A*.-a*2 B*.-a*2 C*.a*2 D*.a*2

13*.*[2015新课标全国*Ⅰ*,5,5分][理]已知*M*(*x*0,*y*0)是双曲线*C*:*-y*2*=*1上的一点,*F*1,*F*2是*C*的两个焦点*.*若·*<*0,则*y*0的取值范围是()

A.(-,) B.(-,) C.(-,) D.(-,)

14*.*[2015湖南,8,5分][理]已知点*A*,*B*,*C*在圆*x*2*+y*2*=*1上运动,且*AB*⊥*BC.*若点*P*的坐标为(2,0),则*|++|*的最大值为()

A.6 B.7 C.8 D.9

15*.*[2014天津,8,5分][理]已知菱形*ABCD*的边长为2,∠*BAD=*120*°*,点*E*,*F*分别在边*BC*,*DC*上,*BE=λBC*,*DF=μDC.*若·*=*1,·*=-*,则*λ+μ=*()

A. B. C. D.

16*.*[2015 广东,16,12分][理]在平面直角坐标系*xOy*中,已知向量***m****=*(,*-*),***n****=*(sin *x*,cos *x*),*x*∈(0,)*.*

(1)若***m***⊥***n***,求t**a**n *x*的值;

(2)若***m***与***n***的夹角为,求*x*的值*.*

id:2147491538;FounderCES

**A组基础题**

1*.*[2018郑州一中高三入学测试,7]△*ABC*的外接圆的圆心为*O*,半径为1,2*=+*,且*||=||*,则向量在向量方向上的投影为()

A. B.- C.- D.

2*.*[2017长沙市五月模拟,8]已知*|****a****|=*1,***a***与***b***的夹角是,(***a****+*2***b***)·***a****=*3,则*|****b****|*的值是()

A.3 B.1 C. D.2

3*.*[2017桂林、百色、梧州、崇左、北海五市联考,3] 在如图5*-*2*-*2所示的矩形*ABCD*中,*AB=*4,*AD=*2,*E*为线段*BC*上的点,则·的最小值为

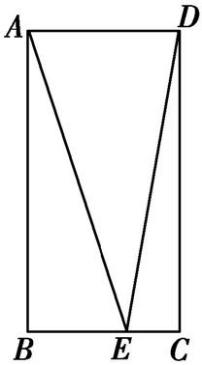


图5*-*2*-*2

()

A.12 B.15 C.17 D.16

4*.*[2018山西省名校第一次联考,13]已知向量***a****=*(6,*-*2),***b****=*(1,***m***),且***a***⊥***b***,则*|****a****-*2***b****|=　　　　.*

5*.*[2018广东七校联考,13]设向量***a***,***b***满足:*|****a****|=*1,*|****b****|=*2,***a***⊥(***a****-****b***),则***a***与***b***的夹角是*.*

6*.*[2018合肥市高三调研性检测,14]已知***a****=*(2,5*t-*1),***b****=*(*t+*1,*-*1),若*|****a****+****b****|=|****a****-****b****|*,则*t=　　　　.*

7*.*[2018惠州市第一次调考,15]已知正方形*ABCD*的中心为*O*,且其边长为1,则(*-*)·(*+*)*=　　　　.*

8*.*[2017长春市高三第四次质量监测,14]若非零向量***a***,***b***满足*|****a****|=*2*|****b****|=|****a****+****b****|*,则向量***a***与***b***夹角的余弦值为*.*

**B组提升题**

9*.*[2018河北省衡水市武邑中学高三三调,10]已知***a***,***b***为平面向量,若***a****+****b***与***a***的夹角为,***a****+****b***与***b***的夹角为,则*=*()

A. B. C. D.2

10*.*[2017合肥市高三第三次质量检测,5]已知向量***a***,***b***满足*|****a****|=*2,*|****b****|=*1,则下列关系可能成立的是()

A*.*(***a****-****b***)⊥***a*** B*.*(***a****-****b***)⊥(***a****+****b***)

C*.*(***a****+****b***)⊥***b*** D*.*(***a****+****b***)⊥***a***

11*.*[2018辽宁省五校联考,13]已知平面向量***a****=*(*x*1,*y*1),***b****=*(*x*2,*y*2),若*|****a****|=*3,*|****b****|=*4,***a***·***b****=-*12,则*=　　　　.*

12*.*[2018湖南省益阳市、湘潭市高三联考,14]已知非零向量***a***,***b***满足:***a***·***b****=*0,*|****a****+****b****|=t|****a****|*,若***a****+****b***与***a****-****b***的夹角为,则*t*的值为*.*

13*.*[2017重庆市七校高三联考,14]在平面四边形*ABCD*中,已知*=*(1,3),*=*(*m*,*-*3),则四边形*ABCD*的面积的最大值为*.*

14*.*[2017武汉市五月模拟,16]如图5*-*2*-*3,在等腰三角形*ABC*中,已知*|AB|=|AC|=*1,∠*A=*120*°*,

*E*,*F*分别是边*AB*,*AC*上的点,且*=λ*,*=μ*,其中*λ*,*μ*∈(0,1),且*λ+*4*μ=*1*.*若线段*EF*,*BC*的中点分别为*M*,*N*,则*||*的最小值为*.*

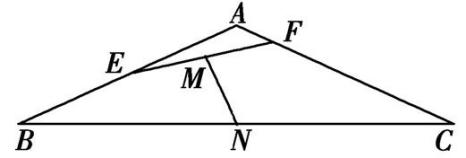


图5*-*2*-*3

15*.*[2017大连市双基测试,17]已知△*ABC*的内角*A*,*B*,*C*的对边分别为***a***,***b***,*c*,且满足cos2*B-*cos2*C-*sin2*A=*sin *A*sin *B.*

(1)求角*C*;

(2)向量***m****=*(sin *A*,cos *B*),***n****=*(cos *x*,sin *x*),若函数*f*(*x*)*=****m***·***n***的图象关于直线*x=*对称,求角*A*,*B.*

**答案**

id:2147497502;FounderCES

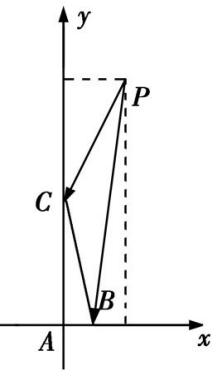
1*.*A由两向量的夹角公式,可得cos∠*ABC===*,则∠*ABC=*30*°.*故选A*.*

2*.*B由***n***⊥(*t****m****+****n***)可得***n***·(*t****m****+****n***)*=*0,即*t****m***·***n****+****n***2*=*0,所以*t=-=-=-=-*3*×=-*3*×=-*4*.*故选B*.*

3*.*D因为*=*2***a***,*=*2***a****+****b***,所以***a****=*,***b****=-=*,因为△*ABC*是边长为2的等边三角形,所以*|****b****|=*2,***a***·***b****=*·*=-*1,故***a***,***b***不垂直,4***a****+****b****=*2*+=+*,故(4***a****+****b***)·*=*(*+*)·

*=-*2*+*2*=*0,所以(4***a****+****b***)⊥,故选D*.*

4*.*A依题意,以点*A*为坐标原点,以*AB*所在的直线为*x*轴,*AC*所在的直线为*y*轴建立如图D 5*-*2*-*3所示的平面直角坐标系,则点*P*(1,4),*B*(,0),*C*(0,*t*),所以·*=*(*-*1,*-*4)·(*-*1,*t-*4)*=*(*-*1)*×*(*-*1)*-*4*×*(*t-*4)*=*17*--*4*t*≤17*-*2*=*13(当且仅当*=*4*t*,即*t=*时取等号),所以·的最大值为13,故选A*.*



图D 5*-*2*-*3

5*.*A由条件,得(***a****-****b***)·(3***a****+*2***b***)*=*3***a***2*-*2***b***2*-****a***·***b****=*0,即***a***·***b****=*3***a***2*-*2***b***2.又*|****a****|=|****b****|*,所以***a***·***b****=*3·(*|****b****|*)2*-*2***b***2*=****b***2,所以cos*<****a***,***b****>===*,所以*<****a***,***b****>=*,故选A*.*

6*.*2易知*|****a****+*2***b****|===*2*.*

7*.*因为*=*,故*=*,解得*λ=.*

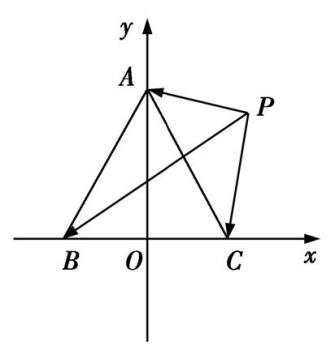
8*.*解法一*=+=+=+*(*-*)*=+.*又·*=*3*×*2*×=*3,所以·*=*(*+*)·(*-+λ*)*=-+*(*λ-*)·*+λ* 2*=-*3*+*3(*λ-*)*+λ×*4*=λ-*5*=-*4,则*λ=.*

解法二以点*A*为坐标原点,的方向为*x*轴正方向,建立平面直角坐标系,不妨假设点*C*在第一象限,则*A*(0,0),*B*(3,0),*C*(1,)*.*由*=*2,得*D*(,),由*=λ-*,得*E*(*λ-*3,*λ*),则·*=*(,)·(*λ-*3,*λ*)*=*(*λ-*3)*+×λ=λ-*5*=-*4,则*λ=.*

9.由***a***·***b****=*1,*|****a****|=*1,*|****b****|=*2可得两向量的夹角为60*°*,建立平面直角坐标系,可设***a****=*(1,0),***b****=*(1,),***e****=*(cos *θ*,sin *θ*),则*|****a***·***e****|+|****b***·***e****|=|*cos *θ|+|*cos *θ+*sin *θ|*≤*|*cos *θ|+|*cos *θ|+*

*|*sin *θ|=|*sin *θ|+*2*|*cos *θ|*≤,所以*|****a***·***e****|+|****b***·***e****|*的最大值为*.*

10*.*B

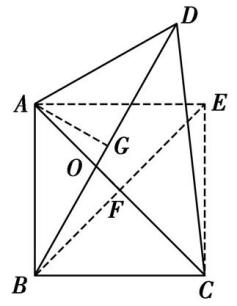


图D 5*-*2*-*4

如图D 5*-*2*-*4,以等边三角形*ABC*的底边*BC*所在直线为*x*轴,以*BC*的垂直平分线为*y*轴建立平面直角坐标系,则*A*(0,),*B*(*-*1,0),*C*(1,0),设*P*(*x*,*y*),则*=*(*-x*,*-y*),*=*(*-*1*-x*,*-y*),*=*(1*-x*,*-y*),

所以·(*+*) *=*(*-x*,*-y*)·(*-*2*x*,*-*2*y*)*=*2*x*2*+*2(*y-*)2*-*,所以当*x=*0,*y=*时,·(*+*)取得最小值,最小值为*-*,故选B*.*

11*.*C如图D 5*-*2*-*5所示,



图D 5*-*2*-*5

四边形*ABCE*是正方形,*F*为正方形的对角线的交点,易得*AO<AF*,而∠*AFB=*90*°*,∴∠*AOB*与∠*COD*为钝角,∠*AOD*与∠*BOC*为锐角*.*根据题意,*I*1*-I*2*=*·*-*·*=*·(*-*)

*=*·*=||*·*||*·cos∠*AOB<*0,∴*I*1*<I*2,同理得,*I*2*>I*3,作*AG*⊥*BD*于*G*,又*AB=AD*,∴*OB<BG=GD<OD*,而*OA<AF=FC<OC*,∴*||*·*||<||*·*||*,而cos∠*AOB=*cos∠*COD<*0,∴·*>*·,即*I*1*>I*3*.*∴*I*3*<I*1*<I*2,故选C*.*

12*.*D在菱形*ABCD*中,*=*,*=+*,所以·*=*(*+*)·*=*·*+*·*=****a***2*+****a****×****a****×*cos60*°=****a***2*+****a***2*=****a***2*.*故选D*.*

13*.*A由题意知*a*2*=*2,*b*2*=*1,所以*c*2*=*3,不妨设*F*1(*-*,0),*F*2(,0),所以*=*(*--x*0,*-y*0),*=*(*-x*0,*-y*0),所以·*=-*3*+=*3*-*1*<*0,所以*-<y*0*<*,故选A*.*

14*.*B解法一因为*A*,*B*,*C*均在单位圆上,*AC*为直径,故*+=*2*=*(*-*4,0),

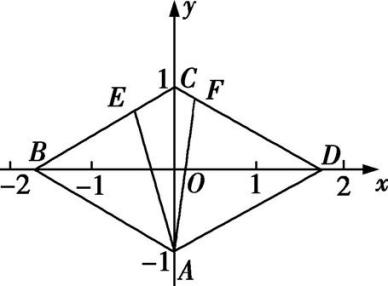
*|++|=|*2*+|*≤2*||+||*,又*||*≤*||+*1*=*3,所以*|++|*≤4*+*3*=*7,故其最大值为7,故选B*.*

解法二因为*A*,*B*,*C*均在单位圆上,*AC*为直径,不妨设*A*(cos *x*,sin *x*),*B*(cos(*x+α*),sin(*x+α*))

(*α*≠*k*π,*k*∈Z),*C*(*-*cos *x*,*-*sin*x*),*++=*(cos(*x+α*)*-*6,sin(*x+α*)),

*|++|==*≤7,故选B*.*

1. C如图D 5*-*2*-*6所示,



图D 5*-*2*-*6

以菱形*ABCD*的两条对角线所在直线为坐标轴,建立平面直角坐标系*xOy*,不妨设*A*(0,*-*1),*B*(*-*,0),*C*(0,1),*D*(,0),由题意得*=*(1*-λ*)·*=*(*λ-*,*λ-*1),*=*(1*-μ*)*=*(*-μ*, *μ-*1)*.*

因为·*=-*,所以3(*λ-*1)·(1*-μ*)*+*(*λ-*1)(*μ-*1)*=-*,即(*λ-*1)(*μ-*1)*=.*

因为*=+=*(*λ-*,*λ+*1),

*=+=*(*-μ*,*μ+*1),·*=*1,所以(*λ+*1)(*μ+*1)*=*2*.*由整理得*λ+μ=.*故选C*.*

16*.*(1)因为***m***⊥*n*,所以***m***·*n=*0*.*

故sin *x-*cos *x=*0,所以tan *x=*1*.*

(2)因为***m***与*n*的夹角为,所以cos*<****m***,*n>===*,故sin(*x-*)*=.*

又*x*∈(0,),所以*x-*∈(*-*,),所以*x-=*,即*x=*,故*x*的值为*.*

id:2147497537;FounderCES

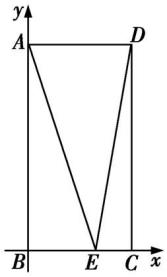
**A组基础题**

1.D依题意知,圆心*O*为*BC*的中点,即*BC*是△*ABC*的外接圆的直径,*AC*⊥*AB.*又*AO=OB=*

*AB=*1,因此∠*ABC=*60*°*,∠*ACB=*30*°*,*||=*,在方向上的投影为*||*cos 30*°=×=*,故选D*.*

2*.*D(***a****+*2***b***)·***a****=****a***2*+*2***a***·***b****=*1*+*2*×*1*×|****b****|=*3,解得*|****b****|=*2,故选D*.*

3*.*B以*B*为坐标原点,*BC*所在直线为*x*轴,*BA*所在直线为*y*轴,建立如图D 5*-*2*-*7所示的平面直角坐标系,则*A*(0,4),*D*(2,4),设*E*(*x*,0)(0≤*x*≤2),所以·*=*(*x*,*-*4)·(*x-*2,*-*4)*=x*2*-*2*x+*16*=*(*x-*1)2*+*15,于是当*x=*1,即*E*为*BC*的中点时,·取得最小值15,故选B*.*



图D 5*-*2*-*7

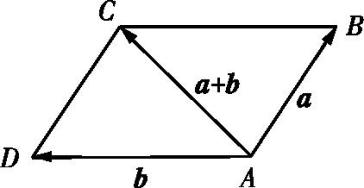
4*.*4由***a****=*(6,*-*2),***b****=*(1,*m*),且***a***⊥***b***,得6*-*2*m=*0,所以*m=*3,所以***a****-*2***b****=*(4,*-*8),所以*|****a****-*2***b****|===*4*.*

5*.*60*°*因为***a***⊥(***a****-****b***),所以***a***·(***a****-****b***)*=*0,故*|****a****|*2*-|****a****||****b****|*·cos*<****a***,***b****>=*0,解得cos*<****a***,***b****>=*,故***a***与***b***的夹角为60*°.*

6*.*1因为***a****=*(2,5*t-*1),***b****=*(*t+*1,*-*1),所以***a****+****b****=*(*t+*3,5*t-*2),***a****-****b****=*(1*-t*,5*t*),因为*|****a****+****b****|=|****a****-****b****|*,所以(*t+*3)2*+*(5*t-*2)2*=*(1*-t*)2*+*(5*t*)2,解得*t=*1*.*

7*.*1(*-*)·(*+*)*=*·*=*1*××*cos 45*°=*1*.*

8*.-*设向量***a***与***b***的夹角为*θ*,由题意得*|****a****|*2*=|****a****+****b****|*2*=|****a****|*2*+|****b****|*2*+*2***a***·***b***,则2***a***·***b****+|****b****|*2*=*0,即2*|****a****||****b****|*·cos *θ=-|****b****|*2,故cos *θ=-.*



图D 5*-*2*-*8

**B组提升题**

9*.*B如图D 5*-*2*-*8所示,在平行四边形*ABCD*中,*=****a***,*=****b***,*=****a****+****b***,∠*BAC=*,∠*DAC=*,所以在△*ABC*中,由正弦定理得*==.*故选B*.*

10*.*C*|****a****|=*2,*|****b****|=*1,设向量***a***,***b***的夹角为*θ*,若(***a****-****b***)⊥***a***,则(***a****-****b***)·***a****=****a***2*-****a***·***b****=*4*-*2cos *θ=*0,解得cos *θ=*2,显然*θ*不存在,故A不成立;若(***a****-****b***)⊥(***a****+****b***),则(***a****-****b***)·(***a****+****b***)*=****a***2*-****b***2*=*4*-*1*=*3≠0,故B不成立;若(***a****+****b***)⊥***b***,则(***a****+****b***)·***b****=****b***2*+****a***·***b****=*1*+*2cos *θ=*0,解得cos *θ=-*,即*θ=*,故C成立;若(***a****+****b***)⊥***a***,则(***a****+****b***)·***a****=****a***2*+****a***·***b****=*4*+*2cos *θ=*0,解得cos *θ=-*2,显然*θ*不存在,故D不成立*.*故选C*.*

11*.-*因为*|****a****|=*3,*|****b****|=*4,***a***·***b****=-*12,所以向量***a***,***b***的夹角为180*°*,即***a****=-****b***,又***a****=*(*x*1,*y*1),***b****=*(*x*2,*y*2),所以*=-.*

12*.*因为非零向量***a***,***b***满足***a***·***b****=*0,所以(***a****-****b***)2*=*(***a****+****b***)2,即*|****a****+****b****|=|****a****-****b****|.*又*|****a****+****b****|=t|****a****|*,所以*|****a****+****b****|=|****a****-****b****|=t|****a****|.*因为***a****+****b***与***a****-****b***的夹角为,所以*=*cos*.*整理,得*=.*即(2*-t*2)*|****a****|*2*=*2*|****b****|*2*.*

又*|****a****+****b****|=t|****a****|*,两边平方,得*|****a****|*2*+|****b****|*2*=t*2*|****a****|*2,所以*|****a****|*2*+=t*2*|****a****|*2,解得*t*2*=.*

由题意,得*t>*0,所以*t=.*

13*.*15设*AC*与*BD*相交于点*O*,设*B*,*D*到*AC*的距离分别为*dB*,*dD*,则*S*四边形*ABCD=*

*×||×dB+×||×dD=×||×*(*dB+dD*)≤*×||×||=××*,当四边形*ABCD*的面积最大时,·*=*1*×m+*3*×*(*-*3)*=*0,得*m=*9,则*S*四边形*ABCD=*15*.*

14*.*连接*AM*,*AN*,由·*=||||*cos*=-*,*=*(*+*)*=*(*λ+μ*),

*=*(*+*),*=-=*(1*-λ*)*+*(1*-μ*),

*=*[(1*-λ*)2*-*(1*-λ*)(1*-μ*)*+*(1*-μ*)2]*=*(1*-λ*)2*-*(1*-λ*)(1*-μ*)*+*(1*-μ*)2,由*λ+*4*μ=*1⇒1*-λ=*4*μ*,可得*=μ*2*-μ+*,∵*λ*,*μ*∈(0,1),∴当*μ=*时,*||*2取最小值,*||*的最小值为,∴*||*的最小值为*.*

15*.*(1)由已知得sin2*A+*sin2*B-*sin2*C=-*sin *A*sin *B*,

由正弦定理得*a*2*+b*2*-c*2*=-ab*,

由余弦定理可得cos *C==-.*

∵0*<C<*π,∴*C=.*

(2)解法一*f*(*x*)*=****m*·*n****=*sin *A*cos *x+*cos *B*sin *x=M*sin(*x+φ*),

其中*M=*,tan *φ=.*

∵*f*(*x*)的图象关于直线*x=*对称,∴*+φ=k*π*+*,*k*∈Z,

∴*φ=k*π+,*k*∈Z,

∴*=*tan *φ=*,即cos *B=*sin *A.*

由(1)得*B=-A*,∴cos(*-A*)*=*sin *A*,得tan *A=*,

∴*A=B=.*

解法二*f*(*x*)*=****m*·*n****=*sin *A*cos *x+*cos *B*sin *x.*

∵*f*(*x*)的图象关于直线*x=*对称,∴*f*(0)*=f*(),

即sin *A=-*sin *A+*cos *B*,3sin *A=*cos *B.*

由(1)得*B=-A*,∴3sin *A=*cos(*-A*),得tan *A=*,

∴*A=B=.*